## Exercice n° 1

1) $\Delta=\left(-2^{\theta+1}\cos\theta\right)^2-4\times2^{2\theta}=2^{2\theta+2}\cos^2\theta-2^{2\theta+2}=2^{2\theta+2}\left(\cos^2\theta-1\right)=-2^{2\theta+2}\sin^2\theta=\left(2^{\theta+1}i\sin\theta\right)^2$

Donc $z^2-\left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)z+2^{2\theta}=0$ possède deux racines :

$$z_1=\frac{2^{\theta+1}\cos\theta+2^{\theta+1}i\sin\theta}{2}=2^{\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)=2^{\theta}e^{i\theta} \text{ et } z_2=\bar{z}_1=2^{\theta}e^{-i\theta}$$

2) $z_{\overrightarrow{OA}}=z_1=2^{\theta}e^{i\theta}$ ; $z_{\overrightarrow{OB}}=z_2=2^{\theta}e^{-i\theta}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\arg(z_2)-\arg(z_1)=-\theta-\theta=-2\theta$

$OA=|z_1|=2^{\theta}=|z_2|=OB$ , Pour que OAB soit équilatéral il faut que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

ou $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $-2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $-2\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou encore

$\theta=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ ou $\theta=\frac{\pi}{6}+k\pi$

## Exercice n° 2

1) $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+i)\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}=2\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

2) a) $z_1=\sqrt{2}(1+i)=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

b) $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{\frac{5i\pi}{12}}$

3) a) $Z=2e^{\frac{5i\pi}{12}}=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

donc $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

## Exercice n° 3

**Partie A**

1) $P(i)=i^3+2(1-i)i^2+2(1-2i)i-4i=-i-2+2i+2i+4-4i=2-i$

$P(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+4(1-i)+2\sqrt{2}(1-2i)-4i=4+4\sqrt{2}-(8-4\sqrt{2})i$

2) $P(iy)=-y^3i-2(1-i)y^2+2y(1-2i)i-4i=-y^3i-2y^2+2iy^2+2iy+4y-4i$

$=-2y^2+4y+(-y^3+2y^2+2y-4)i$

$P(iy)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-2y^2+4y=0\\-y^3+2y^2+2y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0 \text{ ou } y=2\\-y^3+2y^2+2y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow y=2$

Donc $P(2i)=0$

3) $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz-2iz^2-2iaz-2ib=z^3+(a-2i)z^2+(b-2ia)z-2ib$

Donc $\begin{cases}a-2i=2(1-i)\\b-2ia=2(1-2i)\\-2ib=-4i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$

Donc $P(z)=(z-2i)(z^2+2z+2)$

4) $z^2+2z+2=0$ , $\Delta=4-8=-4=(2i)^2$ donc $z=\frac{-2-2i}{2}=-1-i$ ou $z=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$

$P(z)=0\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2+2z+2=0\Leftrightarrow z=2i$ ou $z=-1-i$ ou $z=-1+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{2i,-1+i,-1-i\}$

**Partie B**

1) $\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OA}$ donc $z_D=-2z_A=2-2i$

2) $z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2i+2-2i}{2} = 1$

3) a) $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2i+1-i}{2-2i+1-i} = \frac{i+1}{3-3i} = \frac{(1+i)^2}{3(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{6} = \frac{1}{3}i$ et

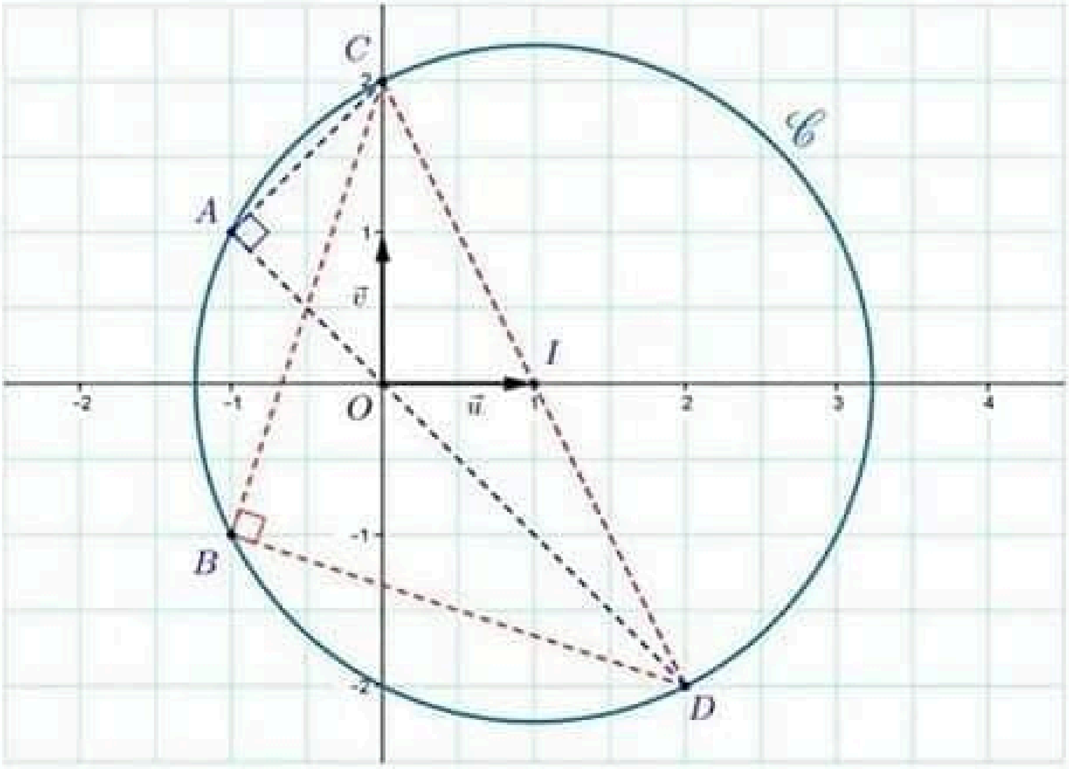
$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{2i+1+i}{2-2i+1+i} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{10} = \frac{3+9i+i-3}{10} = i$

b) $\left|\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right| = \left|\frac{1}{3}i\right| = \frac{1}{3}$, $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$, $\left|\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

c) $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} = \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)$ donc ACD est rectangle en A

$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} = \left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}\right)$ donc BCD est rectangle en A, $\left|\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right| = 1 = \frac{BC}{BD}$ donc BCD isocèle de sommet principal B

d) A, C et D se trouvent sur le cercle circonscrit au triangle ACD c'est-à-dire le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon IA. Le cercle $\mathscr{C}$ passe par B car son diamètre est l'hypotenus du triangle rectangle BCD




## Exercice n° 4

1) $-2$ est une solution réelle de l'équation $(E): z^3+8=0$ donc :

$z^3+8=(z+2)(z^2+az+c)=z^3+az^2+cz+2z^2+2az+2c=z^3+(a+2)z^2+(c+2a)z+2c$

Et par suite $\begin{cases} a+2=0 \\ c+2a=0 \\ 2c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=4 \end{cases}$ donc $z^3+8=(z-2)(z^2-2z+4)$

$z^2-2z+4=0$, $\Delta=-12=(2i\sqrt{3})^2$ donc $z=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ou $z=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$

En fin $(E): z^3+8=0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2-2z+4)=0 \Leftrightarrow z=-2=2e^{i\pi}$ ou $z=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

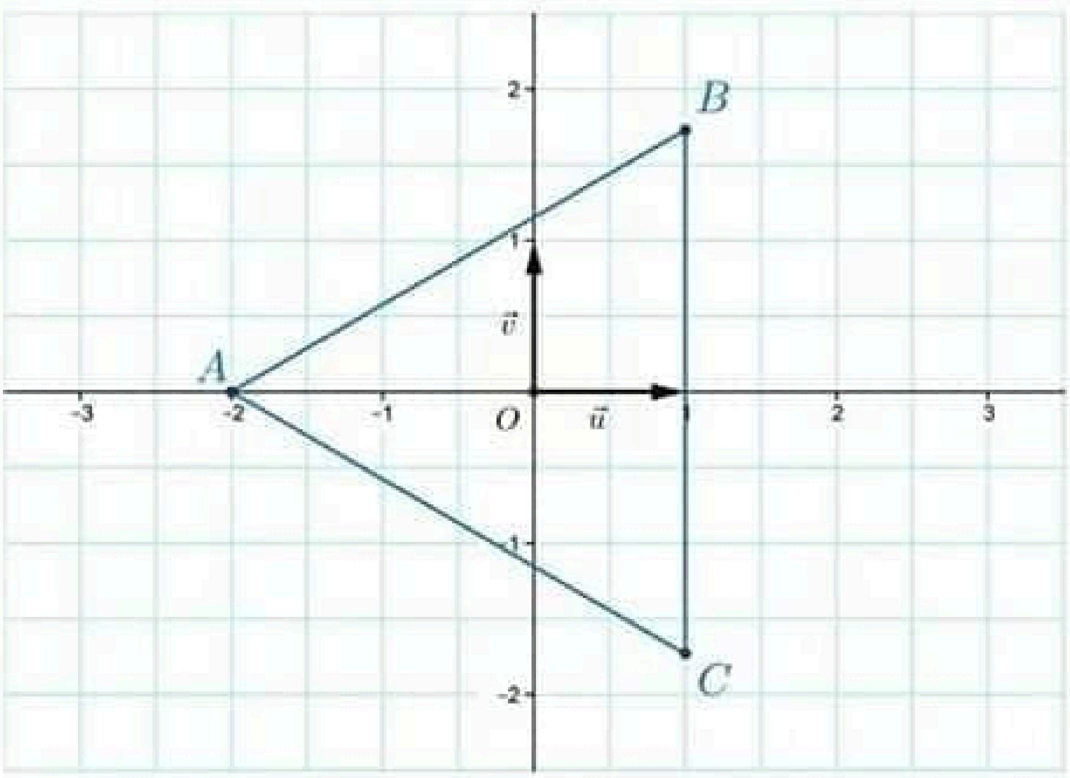
$S_{\mathbb{C}}=\{-2, 1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\}$

2) $z_A=-2$, $z_B=1+i\sqrt{3}$ et $z_C=1-i\sqrt{3}$

$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ et

$BC=|z_C-z_B|=|-2i\sqrt{3}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

On a $AB = AC = BC$ donc ABC est un triangle équilatéral




## Exercice n° 5

1) Soit $z_1 = x$ un nombre réel, x est solution de (E)

$\Leftrightarrow 2x^2 + (7 + i\sqrt{3})x - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + 7x - 4) + i(x\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 0$

C'est-à-dire $\begin{cases} 2x^2 + 7x - 4 = 0 \\ x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -4 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4$ donc $z_1 = -4$

Soit $z_2$ l'autre solution de (E) on a donc $z_1 + z_2 = -\frac{7 + i\sqrt{3}}{2}$ donc $z_2 = -\frac{7 + i\sqrt{3}}{2} + 4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

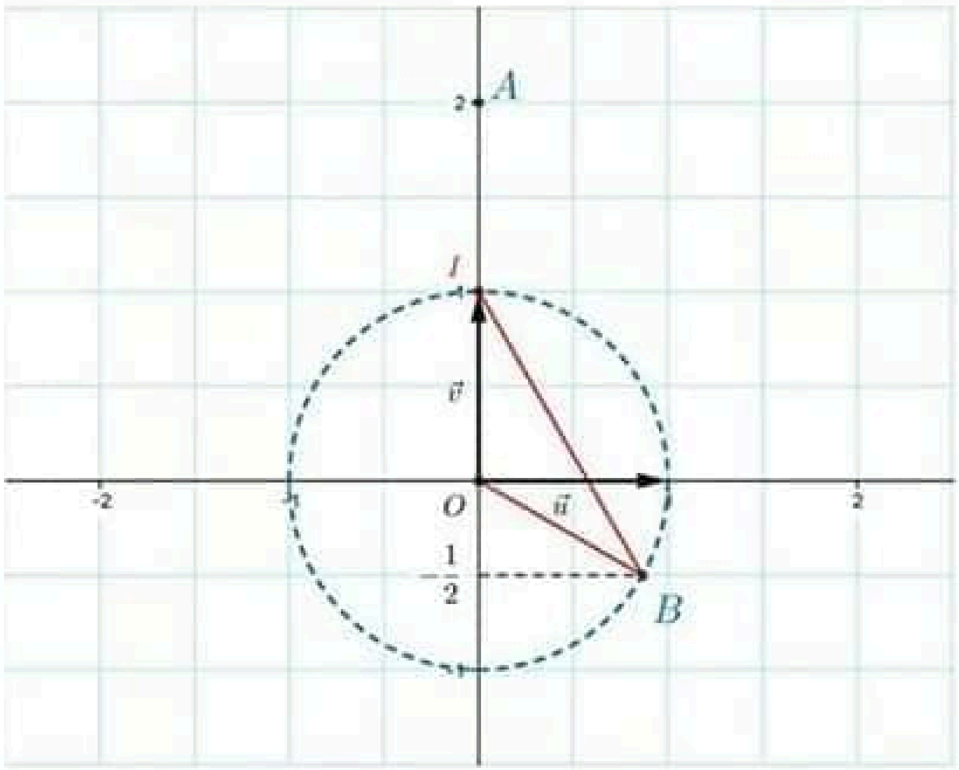
2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) On pose $Z = z$ , $(E') \Leftrightarrow 2Z^2 + (7 + i\sqrt{3})Z - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$ $Z = -4$ ou $Z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $z = 2i$

ou $z = -2i$ ou $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

4) $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_I = \frac{z_A}{2} = i$ , $OI = |z_I| = 1$ et $OB = |z_B| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 = OI$ donc OIB est isocèle






## Exercice n° 6

1) $\frac{z_A + z_B}{2} = i$ et $\frac{z_O + z_C}{2} = i$ donc $[AB]$ et $[OC]$ ont le même milieu et par suite OACB est un parallélogramme

$\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{OC}}} = \frac{z_B - z_A}{z_C} = \frac{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}{2i} = \frac{-\sqrt{3}}{i} = i\sqrt{3} \in i\,IR$ donc $(OC) \perp (AB)$ et par suite OACB est un losange

2) $\Delta = (2i)^2 - 4 \times (-4) = 16 - 4 = 12$, donc $(E)$ possède deux racines $z_1 = i - \sqrt{3} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et

$z_2 = i + \sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

3) $(2i)^3 - 4i(2i)^2 - 8 \times (2i) + 8i = -8i + 16i - 16i + 8i = 0$ donc $P(2i) = 0$

$(z - 2i)(z^2 + mz + p) = z^3 + mz^2 + pz - 2iz^2 - 2imz - 2ip$

$= z^3 + (m - 2i)z^2 + (p - 2im)z - 2ip = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i$

donc $\begin{cases} m - 2i = -4i \\ p - 2im = -8 \\ -2ip = 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2i \\ p = -4 \end{cases}$ donc $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i = (z - 2)(z^2 - 2iz^2 - 4)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2iz - 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = i - \sqrt{3}$ ou $z = i + \sqrt{3}$

## Exercice n° 7

**Partie A**

1) $(3 + i)^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$ donc $(3 + i)$ est une racine carrée complexe de $(8 + 6i)$

2) $(-i)^3 - (1 + 4i)(-i)^2 - 3 \times (-i) - 1 - 8i = i + (1 + 4i) + 3i - 1 - 8i = i + 4i + 3i - 8i + 1 - 1 = 0$ donc $(-i)$ est une racine de $(E)$ et par suite on peut écrire :

$z^3 - (1 + 4i)z^2 - 3z - 1 - 8i = (z + i)(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ic$

$= az^3 + (b + ai)z^2 + (c + bi)z + ic$

Donc $\begin{cases} a = 1 \\ b + ai = -(1 + 4i) \\ c + bi = -3 \\ ic = -1 - 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 5i = -(1 + 5i) \\ c = -8 + i \end{cases}$

Enfin $z^3-(1+4i)z^2-3z-1-8i=(z+i)(z^2+-(1+5i)z-8+i)$

3) $z^2+-(1+5i)z-8+i=0$, $\Delta=(1+5i)^2-4\times(i-8)=1+10i-25-4i+32=8+6i=(3+i)^2$

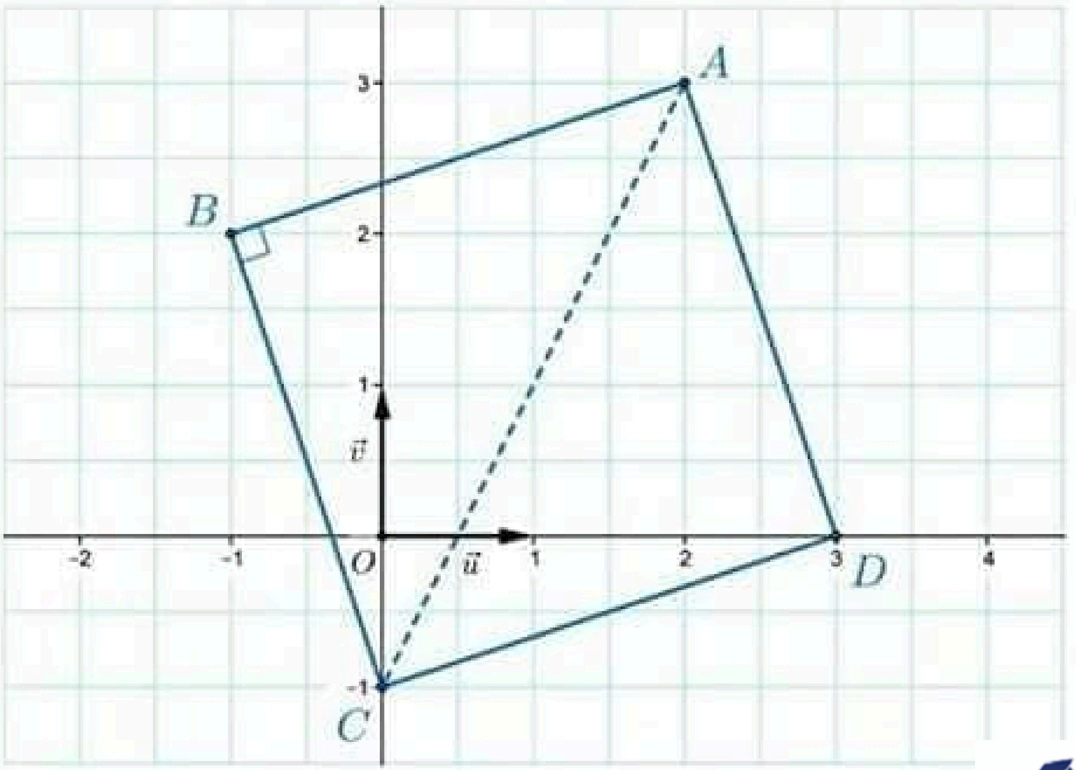
$z_1=\dfrac{1+5i+3+i}{2}=2+3i$ $\qquad z_2=\dfrac{1+5i-3-i}{2}=-1+2i$ donc $S_{\mathbb{C}}=\{2+3i;-1+2i\}$

4) $(E)\Leftrightarrow(z+i)(z^2+-(1+5i)z-8+i)\Leftrightarrow z=-i$ ou $(z^2+-(1+5i)z-8+i)=0$ donc

$S_{\mathbb{C}}=\{2+3i;-1+2i;-i\}$

**Partie B**

1)




2) a) $|Z|=\left|\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\right|=\dfrac{|z_3-z_2|}{|z_1-z_2|}=\dfrac{BC}{BA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\right)=(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$

b) $Z=\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\dfrac{-i+1-2i}{2+3i+1-2i}=\dfrac{1-3i}{3+i}=\dfrac{(1-3i)(3-i)}{10}=\dfrac{3-i-9i-3}{10}$

$=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

c) $|Z|=|i|=1=\dfrac{BC}{BA}$ et $\arg(Z)=-\dfrac{\pi}{2}=(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ donc ABC est isocèle rectangle en B

3) On a $AB=BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})=-\dfrac{\pi}{2}$ donc il suffit de montrer que ABCD est un parallélogramme pour en déduire que c'est un carrée :

$\left.\begin{array}{l}\dfrac{z_1+z_3}{2}=\dfrac{2+3i-i}{2}=1+i\\ \dfrac{z_2+z_4}{2}=\dfrac{-1+2i+3}{2}=1+i\end{array}\right\}$ [AC] et [BD] ont le même milieu donc ABCD est un parallélogramme

d'où le résultat

## Exercice n° 8

I. 1)

$(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=z^3-2\sqrt{3}z^2+4z-2iz^2+4i\sqrt{3}z-8i=z^3-2(i+\sqrt{3})z+4(1+i\sqrt{3})z-8i=f(z)$

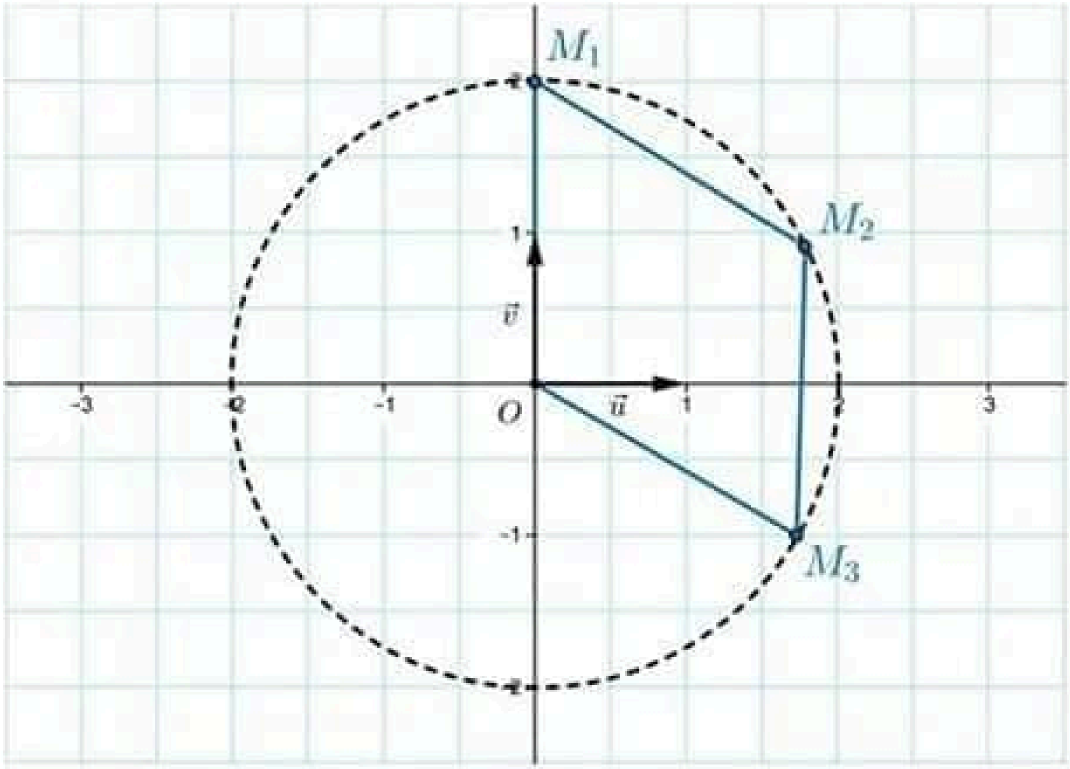
2) $f(z)=0\Leftrightarrow(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0\Leftrightarrow(z-2i)=0$ ou $(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$\Leftrightarrow z=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$z^2-2\sqrt{3}z+4=0$, $\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times4=12-16=-4=(2i)^2$ donc $z_1=\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et

$z_2 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i, (\sqrt{3}-i), (\sqrt{3}+i)\}$






**II.** On a $OM_1 = |z_1| = 2$, $OM_2 = |z_2| = 2$ et $OM_3 = |z_3| = 2$ donc $M_1$, $M_2$ et $M_3$ se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon 2

$z_2 - z_1 = \sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i = 2i \qquad z_2 - z_3 = \sqrt{3}+i-2i = \sqrt{3}-i$

$\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{\sqrt{3}-i+2i}{2} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{z_2}{2}$ donc $[M_1M_3]$ et $[OM_2]$ ont le même milieu et par suite $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme

$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |2i| = 2$ et $M_3M_2 = |z_2 - z_3| = |\sqrt{3}-i| = 2 = M_1M_2$ donc $OM_1M_2M_3$ est un losange

## Exercice n° 9

1) $P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63 = 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = 0$

$P(-i\sqrt{3}) = (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63 = 9 - 18i\sqrt{3} - 72 + 18i\sqrt{3} + 63 = 0$

On note $Q(z) = az^2 + bz + c$, pour tout nombre complexe z on a :

$(z^2+3)(az^2+bz+c) = az^4 + bz^3 + cz^2 + 3az^2 + 3bz + 3c = az^4 + bz^3 + (c+3a)z^2 + 3bz + 3c = P(z)$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c + 3a = 24 \\ 3b = -18 \\ 3c = 63 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 21 \end{cases} \text{ donc } P(z) = (z^2+3)(z^2-6z+21)$$

2) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2+3)(z^2-6z+21) = 0 \Leftrightarrow (z^2+3) = 0$ ou $(z^2-6z+21) = 0$

L'équation $(z^2+3) = 0$ admet pour solutions $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$

L'équation $(z^2-6z+21) = 0$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 84 = -48 = (4i\sqrt{3})^2$ donc les solutions sont $z_1 = \frac{6+4i\sqrt{3}}{2} = 3+2i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3-2i\sqrt{3}$ $\qquad S_{\mathbb{C}} = \{(i\sqrt{3}), (-i\sqrt{3}), (3+2i\sqrt{3}), (3-2i\sqrt{3})\}$

3) On a $z_A = \overline{z_B}$ et $z_D = \overline{z_C}$ donc s'il existe un cercle $C$ de centre $\Omega$ qui passe par A, B C et D alors $\Omega$ doit appartenir à l'axe des abscisses (l'axe des abscisse est la médiatrice des segments $[AB]$ et $[CD]$). Cherchons s'il existe un point $\Omega$ d'affixe $z_\Omega = x$ réel pure équidistant des points

A, B, C et D :

$\Omega A^2 = |i\sqrt{3} - x|^2 = x^2 + 3$ et $\Omega C^2 = |3 - x + 2i\sqrt{3}|^2 = (3-x)^2 + 12 = 9 - 6x + x^2 + 12 = x^2 - 6x + 21$

$\Omega A = \Omega C \Leftrightarrow \Omega A^2 = \Omega C^2 \Leftrightarrow x^2 + 3 = x^2 - 6x + 21 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$ donc $z_\Omega = 3$

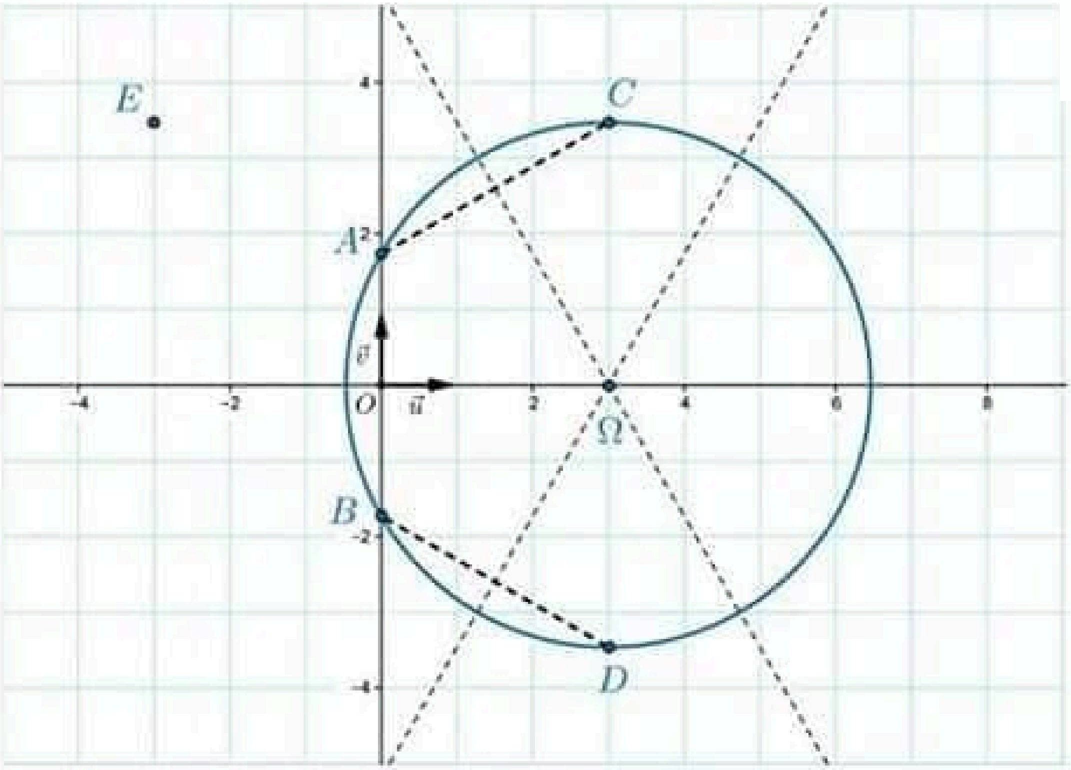
$\Omega A = \sqrt{12}$ , $\Omega C = \sqrt{12}$ , $\Omega B = |-i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{12}$ et $\Omega D = |3 - 2i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{12}$ donc A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(3)$ et de rayon $\sqrt{12}$

4) $z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = \left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc BE = BC est isocèle

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ donc BEC est équilatéral




## Exercice n° 10

1) a) $z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z - i)(z + i)(z - 1)(z + 1)$

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z + i)(z - 1)(z + 1) = 0$ donc $S_{\mathbb{C}} = \{-i, i, -1, 1\}$

c) On pose $Z = \frac{2z+1}{z-1}$ on aura, pour tout $z \neq 1$,

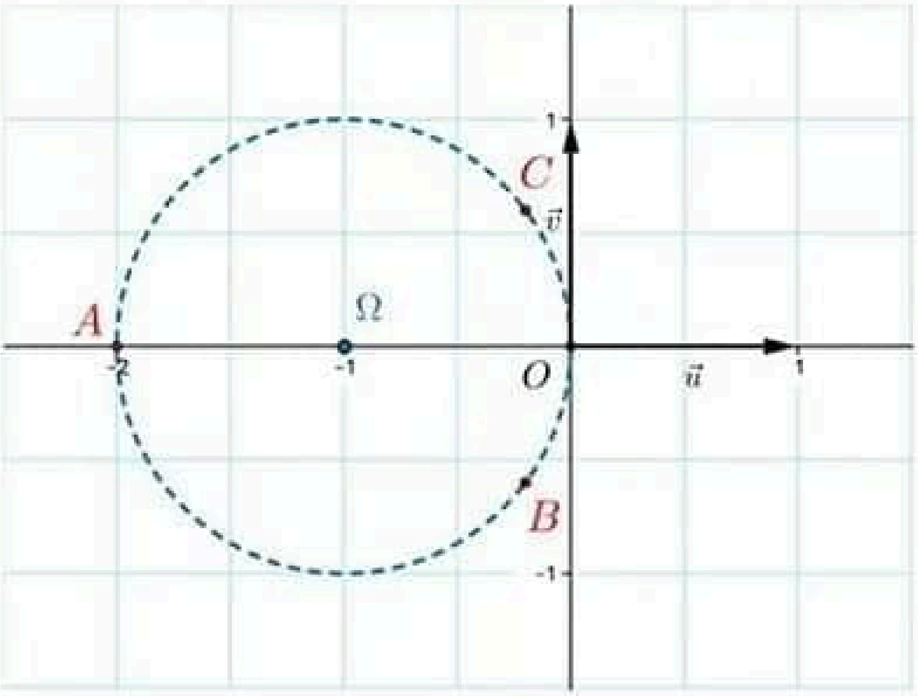
$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow Z^4 = 1 \Leftrightarrow Z = -i \text{ ou } Z = i \text{ ou } Z = -1 \text{ ou } Z = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = -i \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = i \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = -1 \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2z + 1 = -iz + i \text{ ou } 2z + 1 = iz - i \text{ ou } 2z + 1 = -z + 1 \text{ ou } 2z + 1 = z - 1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i-1}{2+i} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \text{ ou } z = \frac{-1-i}{2-i} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = -2$$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{0, -2, -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i, -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right\}$




2) b et c sont conjugués donc tous les cercles qui passent par B et C ont des centres sur l'axe des abscisses de plus A et O sont sur l'axe des abscisses donc si O, A B et C sont situés sur un même cercle il sera le cercle de diamètre $[OA]$. Vérifions cette hypothèse :

$\Omega(-1)$ est le milieu de $[OA]$

$\Omega A = |a+1| = |-1| = 1 \qquad \Omega B = |b+1| = \left|\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right| = \frac{1}{5}|4-3i| = 1$

$\Omega C = |c+1| = \left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right| = \frac{1}{5}|4+3i| = 1 \qquad \Omega O = |-1| = 1$



Donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega O$ d'où le résultat.

3) a) $z' = \dfrac{a-c}{d-c} = \dfrac{-\frac{9}{5} - \frac{3}{5}i}{-\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i} = 2-2i$

b) $\dfrac{CA}{CD} = \left|\dfrac{a-c}{d-c}\right| = |2-2i| = 2\sqrt{2} \qquad (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = \arg\left(\dfrac{a-c}{d-c}\right) = \arg(2-2i) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

## Exercice n° 11

1) a) $(-i)^3 + (-8+i)i^2 - (17-8i)i + 17i = i - (-8+i) - 17i + 8 + 17i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0$ donc $(-i)$ est une racine de $(E)$

b) et par suite on peut écrire :

$$\begin{aligned} z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i &= (z+i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + aiz^2 + biz + ci \\ &= az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} a = 1 \\ b + ai = -8+i \\ c + bi = 17-8i \\ ci = 17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 17 \end{cases}$

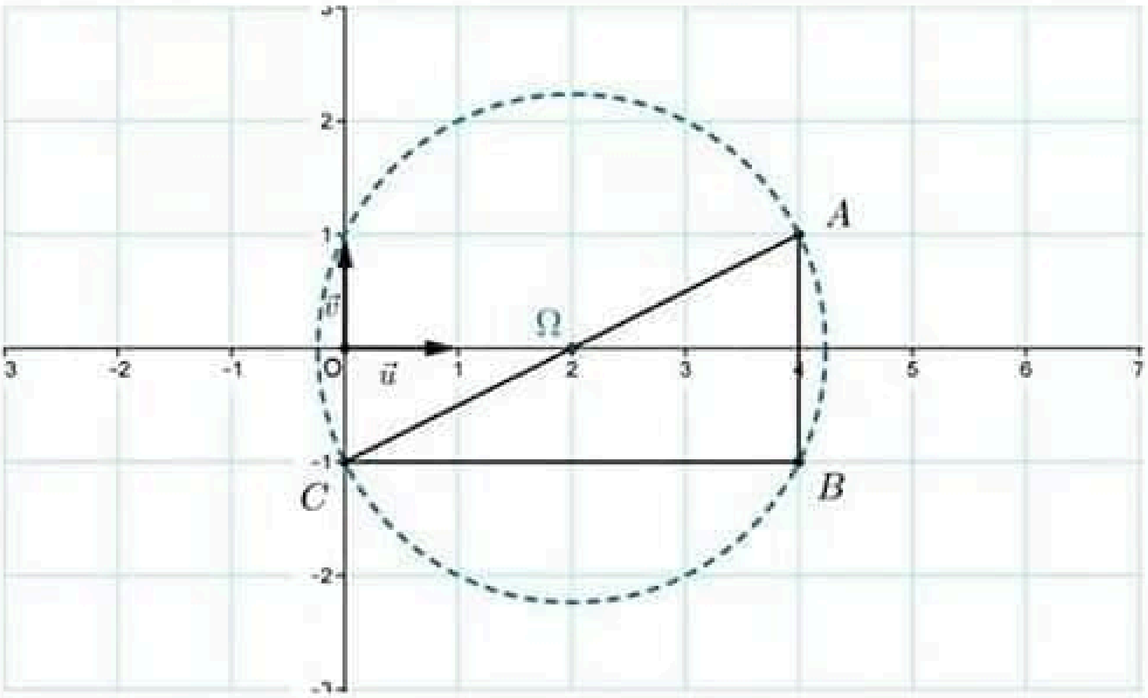
c'est-à-dire $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

c) $z^2 - 8z + 17 = 0$, $\Delta = 64 - 4\times 17 = -4 = (2i)^2$, $z_1 = \dfrac{8-2i}{2} = 4-i$ et $z_1 = \dfrac{8+2i}{2} = 4+i$

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0 \Leftrightarrow z + i = 0$ ou $z^2 - 8z + 17 = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z = 4-i$ ou $z = 4+i$

2) b) $\dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{-2i}{4} = -\dfrac{1}{2}i$ est imaginaire pure donc ABC est rectangle en B

e) $z_\Omega = \dfrac{a+c}{2} = 2$




3) ABC est rectangle en B donc $\Omega$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC. Vérifions que $D \in \mathscr{C}$ :

$\Omega D = |z_\Omega - d| = |1+2i| = \sqrt{5}$

$\Omega A = |z_\Omega - a| = |2-i| = \sqrt{5} = \Omega D$ donc D appartient au cercle de centre $\Omega$ et passant par A : c'est le cercle $\mathscr{C}$

Conclusion : A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon $\sqrt{5}$

## Exercice n° 12

1) a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ $\quad \Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$ donc $z_1 = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i$ et $z_2 = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$

b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$, $\Delta = 4(1+\sqrt{3})^2 - 20 - 8\sqrt{3} = -16 = -4 = (2i)^2$ donc :

$$z_1 = \frac{2(1+\sqrt{3})+2i}{2} = 1+\sqrt{3}+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2(1+\sqrt{3})-2i}{2} = 1+\sqrt{3}-i$$

2) a) ABCD est un trapèze :

$\dfrac{z_A - z_D}{z_B - z_C} = \dfrac{4i}{2i} = 2 \in \mathbb{R}$ donc $(AD)//(BC)$

b) $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i} = \dfrac{(-\sqrt{3}-3i)(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} = \dfrac{4\sqrt{3}i}{2} = 2i\sqrt{3}$

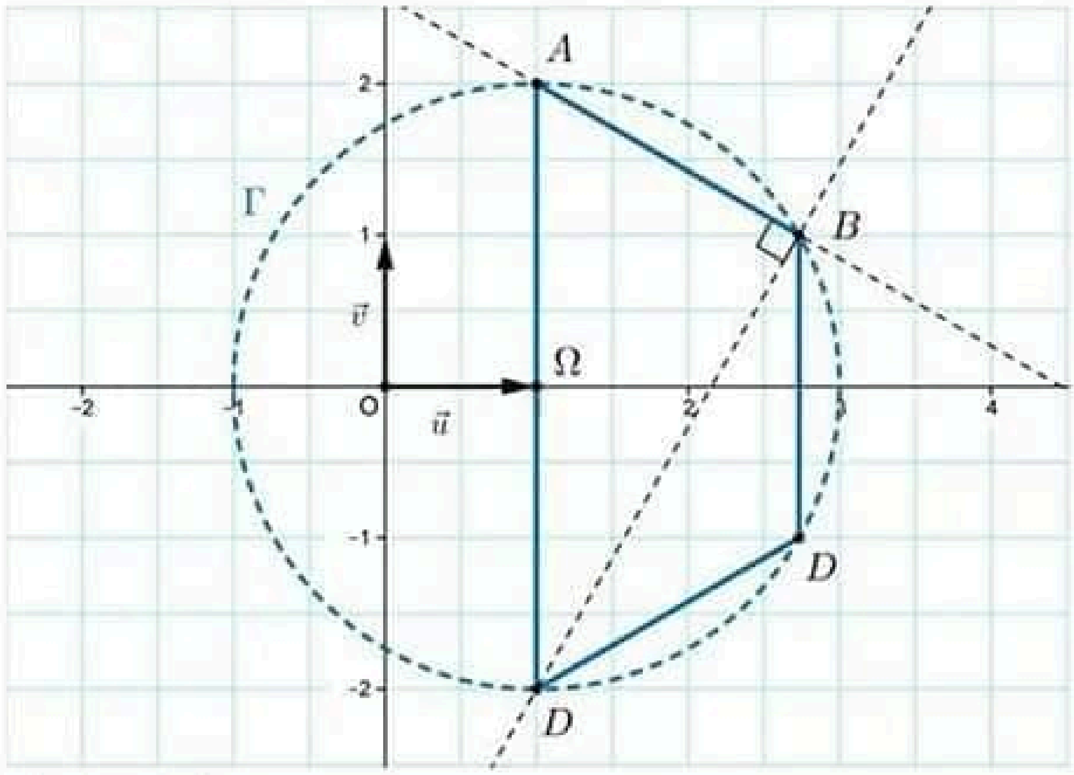
$\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B}$ est imaginaire pure donc $(AB) \perp (BD)$

c) ABD est un triangle rectangle donc $\Omega$, le milieu de $[AD]$, est le centre du son cercle circonscrit

$z_\Omega = \dfrac{z_A + z_D}{2} = 1 \qquad \Omega A = |2i| = 2$

Vérifions donc que C appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon 2 (le cercle circonscrit au triangle ABC) :

$\Omega C = |1 - 1 + \sqrt{3} - i| = |\sqrt{3} - i| = 2$ d'où le résultat






3) $z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$

$\Delta = 4(1+2\cos\theta)^2 - 20 - 16\cos\theta = 4(1+4\cos\theta+4\cos^2\theta) - 20 - 16\cos\theta = -16 + 16\cos^2\theta = -16\sin^2\theta$
$= (4i\sin\theta)^2$

$z_1 = \dfrac{2(1+2\cos\theta) - 4i\sin\theta}{2} = 1 + 2\cos\theta - 2i\sin\theta = 1 + 2e^{-i\theta}$

$z_2 = \dfrac{2(1+2\cos\theta) + 4i\sin\theta}{2} = 1 + 2\cos\theta + 2i\sin\theta = 1 + 2e^{i\theta}$

$|z_\Omega - z_1| = |2e^{-i\theta}| = 2 = |z_\Omega - z_2|$ donc les images de $z_1$ et $z_2$ sont situés sur le cercle $\mathscr{C}$

## Exercice n° 13

1) $z^2 - 4z + 8 = 0$, $\Delta = 16 - 4\times 8 = -16 = (4i)^2$ donc $z_1 = \dfrac{4+4i}{2} = 2+2i$ et $z_2 = \dfrac{4-4i}{2} = 2-2i$

2) $|z_1| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $\arg(z_1) = \arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$

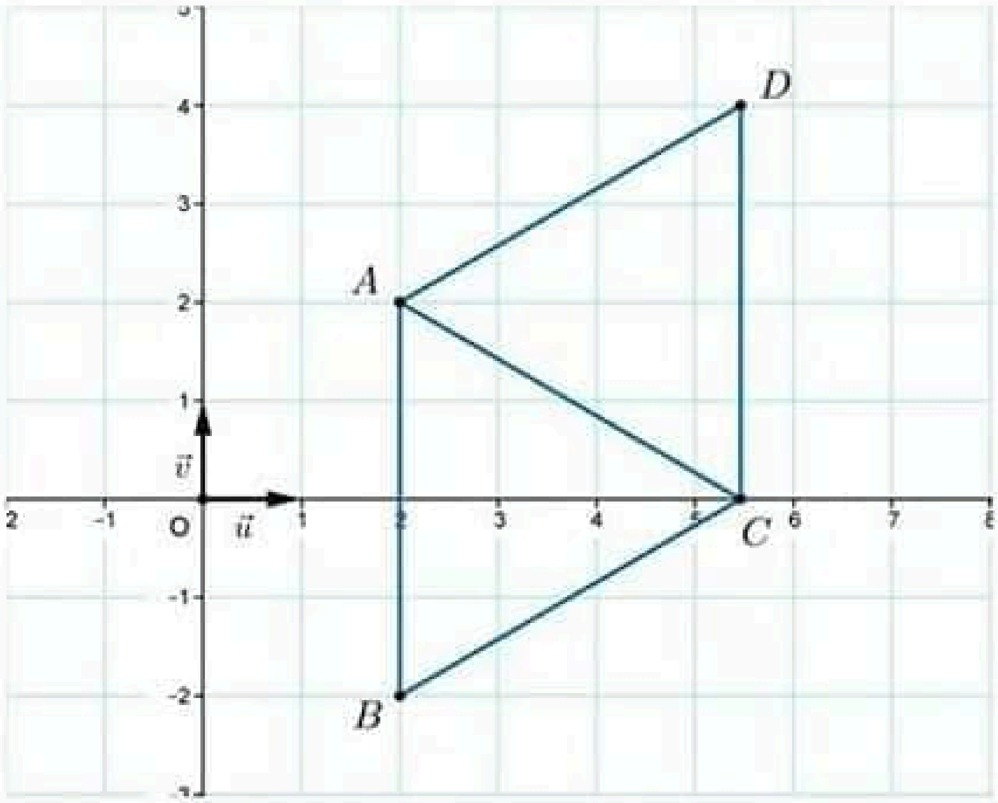
$|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $\arg(z_2) = \arg(2(1-i)) = -\frac{\pi}{4}$

3) b) $AB = |z_B - z_A| = |4i| = 4$, $AC = |z_C - z_A| = |2\sqrt{3} - 2i| = 4$, $BC = |z_C - z_B| = |2\sqrt{3} - 2i| = 4$

Donc ABC est un triangle équilatéral

c) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -4i$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -4i = z_{\overrightarrow{AB}}$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme et comme $AB = BC$ alors ABCD est un losange




## Exercice n° 14

1) $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0 \qquad \Delta = 8 - 16 = -8 = \left(2i\sqrt{2}\right)^2$

donc $\quad z' = \dfrac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(1-i) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad$ et $\quad z'' = \dfrac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{(1+i)\sqrt{2}, (1-i)\sqrt{2}\right\}$

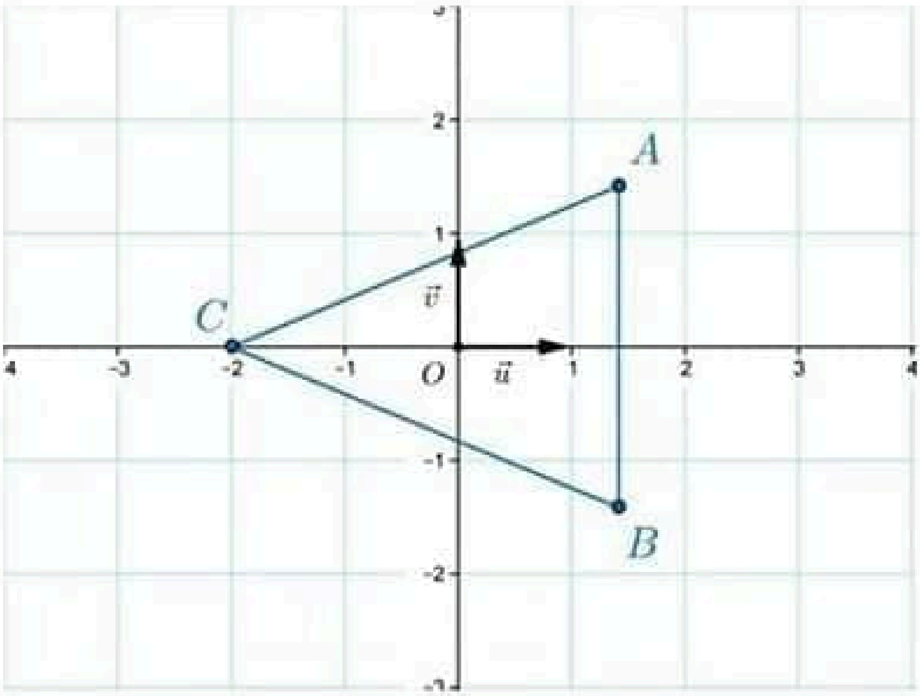
2) $|z| = \left|\dfrac{a-c}{b-c}\right| = \dfrac{AC}{BC}$ et $\arg(z) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$

$$z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 2} = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i} = \frac{\left(1 + \sqrt{2} + i\right)^2}{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 + 1} = \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 + 2i\left(1 + \sqrt{2}\right) - 1}{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2i\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$|z| = \dfrac{AC}{BC} = 1$ donc $AC = BC$ et par suite $ABC$ est un triangle isocèle.

$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$






## Exercice n° 15

**Partie A**

1) $(3+4i)^2 = 9+24i-16 = -7+24i$

2) $z^2-(5+2i)z+7-i=0$ $\quad \Delta = (5+2i)^2-4(7-i) = 25+20i-4-28+4i = -7+24i = (3+4i)^2$

$$z_1 = \frac{5+2i-(3+4i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i \text{ et } z_2 = \frac{5+2i+(3+4i)}{2} = \frac{8+6i}{2} = 4+3i$$

3) $i^3-(5+3i)i^2+(5+4i)i-1-7i = -i+5+3i+5i-4-1-7i = 0$ donc i est une racine de $(E)$

4) On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} z^3-(5+3i)z^2+(5+4i)z-1-7i &= (z-i)(az^2+bz+c) \\ &= az^3+bz^2+cz-aiz^2-biz-ci \\ &= az^3+(b-ai)z^2+(c-bi)z-ci \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} a=1 \\ b-ai=-5-3i \\ c-bi=5+4i \\ -ci=-1-7i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5-2i \\ c=7-i \end{cases}$

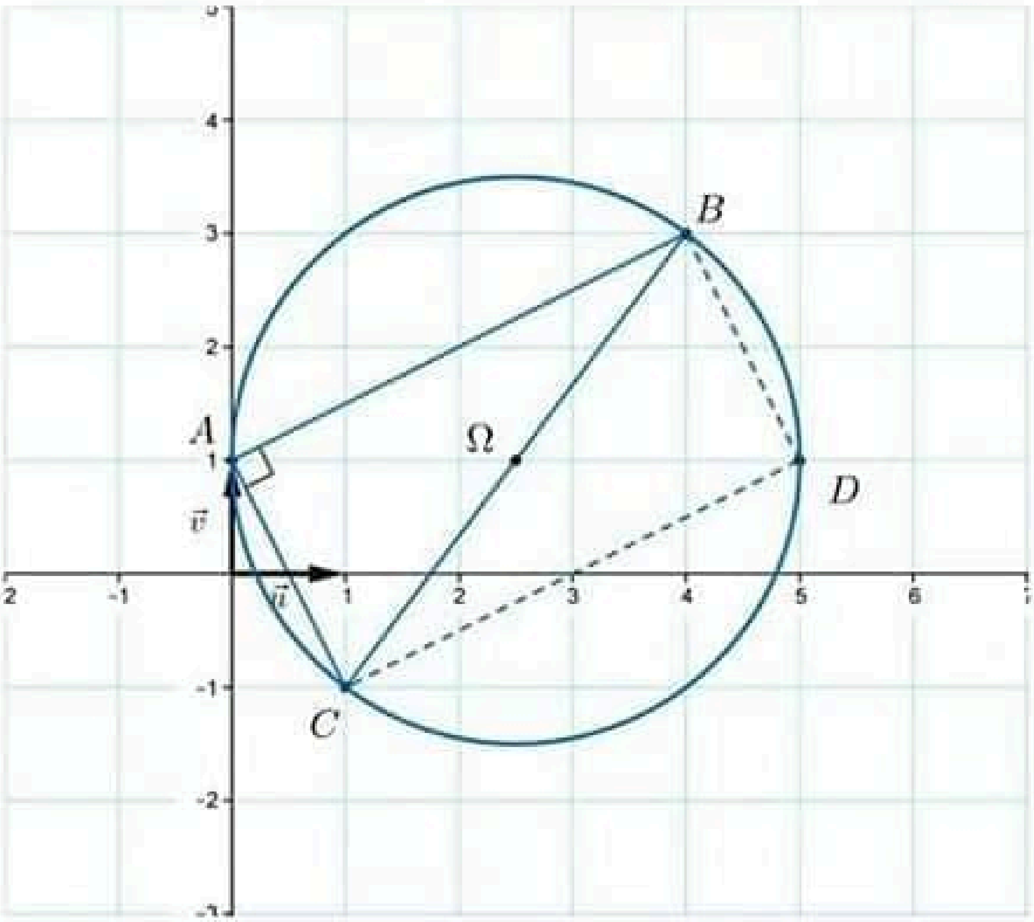
c'est-à-dire $z^3-(5+3i)z^2+(5+4i)z-1-7i = (z-i)\left(z^2-(5+2i)z+7-i\right)$

5) $$\begin{aligned} z^3-(5+3i)z^2+(5+4i)z-1-7i=0 &\Leftrightarrow (z-i)\left(z^2-(5+2i)z+7-i\right)=0 \\ &\Leftrightarrow z-i=0 \text{ ou } z^2-(5+2i)z+7-i=0 \\ &\Leftrightarrow z=i \text{ ou } z=1-i \text{ ou } z=4+3i \end{aligned}$$

$S_{\mathbb{C}} = \{i, 1-i, 4+3i\}$

**Partie B**

1)






2) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{4+2i}{1-2i} = 2i$ est imaginaire pure donc $(AB) \perp (AC)$ c'est-à-dire ABC est rectangle en A.

3) a) ABC est rectangle en A donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de $[BC]$ c'est-à-dire $z_\Omega = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{5+2i}{2} = \dfrac{5}{2} + i$

b) $r = \Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-\dfrac{5}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$

4) a) $\Omega D = |z_D - z_\Omega| = \left|\dfrac{5}{2}\right| = \dfrac{5}{2} = r$ donc $D \in \mathscr{C}$

b) Il suffit de montrer que ABCD est un parallélogramme pour conclure puisque $\widehat{BAC}$ est un angle rectangle.

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 1 - 2i$

$z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = 1 - 2i = z_{\overrightarrow{AC}}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ donc ABCD est un parallélogramme et par conséquence un rectangle